Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

Dienstag, 9. November 2021 (Vormittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

8821 – 7128

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 25]

In dieser Aufgabe sollen Sie einige der Eigenschaften der speziellen Funktionen f und g sowie den Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus untersuchen.

Die Funktionen f und g sind definiert als $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$ und $g(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}$, mit $z\in\mathbb{C}$.

Betrachten Sie t und u, mit $t,\ u\in\mathbb{R}$.

(a) Validieren Sie, dass $u=f(t)$ die Differentialgleichung $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=u$ erfüllt. [2]

(b) Zeigen Sie, dass gilt: $\left(f(t)\right)^2+\left(g(t)\right)^2=f(2t)$. [3]

(c) Verwenden Sie den Zusammenhang $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}=\cos u+\mathrm{i}\sin u$ und finden Sie Ausdrücke in $\sin u$ und $\cos u$ für

(i) $f(\mathrm{i}u)$; [3]

(ii) $g(\mathrm{i}u)$. [2]

(d) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für $\left(f(\mathrm{i}u)\right)^2+\left(g(\mathrm{i}u)\right)^2$ und vereinfachen Sie diesen. [2]

(e) Zeigen Sie, dass $\left(f(t)\right)^2-\left(g(t)\right)^2=\left(f(\mathrm{i}u)\right)^2-\left(g(\mathrm{i}u)\right)^2$. [4]

Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind als Winkelfunktionen bekannt, da der allgemeine Punkt $(\cos\theta,\sin\theta)$ die Punkte auf dem Einheitskreis mit der Gleichung $x^2+y^2=1$ definiert.

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind als Hyperbelfunktionen bekannt, da der allgemeine Punkt $\left(f(\theta),g(\theta)\right)$ Punkte auf einer Kurve definiert, die als Hyperbel mit der Gleichung $x^2-y^2=1$ bekannt ist. Diese Hyperbel hat zwei Asymptoten.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von $x^2-y^2=1$, und geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte mit den Achsen sowie die Gleichung jeder Asymptoten an. [4]

Die Hyperbel mit der Gleichung $x^2-y^2=1$ kann so gedreht werden, dass sie mit der Kurve übereinstimmt, die durch $xy=k$, mit $k\in\mathbb{R}$, definiert ist.

(g) Finden Sie die möglichen Werte von k. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 30]

In dieser Aufgabe sollen Sie die Strategien untersuchen, die zur Lösung eines Systems linearer Differentialgleichungen erforderlich sind.

Betrachten Sie das System linearer Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y \text{ und } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ax + y,$$

wobei $x, y, t \in \mathbb{R}^+$ und a ein Parameter ist.

Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$.

(a) (i) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$, dass $y = A\mathrm{e}^t$, wobei A eine Konstante ist. [3]

(ii) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = -A\mathrm{e}^t$. [1]

(iii) Lösen Sie die Differentialgleichung in Teil (a)(ii) und finden Sie somit x als Funktion von t. [4]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -1$.

(b) (i) Zeigen Sie durch Differenzieren von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y$ nach t, dass gilt: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. [3]

(ii) Zeigen Sie durch die Substitution $Y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, dass $Y = B\mathrm{e}^{2t}$, wobei B eine Konstante ist. [3]

(iii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit y als Funktion von t. [2]

(iv) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $x = -\frac{B}{2}\mathrm{e}^{2t} + C$, wobei C eine Konstante ist. [3]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -4$.

(c) (i) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0$. [3]

Die vorigen Fälle lassen vermuten, dass $y = F\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und F eine Konstante ist.

(ii) Finden Sie die beiden Werte für λ, so dass gilt: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0$. [4]

Die beiden in Teil (c)(ii) gefundenen Werte seien λ_1 und λ_2.

(iii) Validieren Sie, dass $y = F\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + G\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ eine Lösung der Differentialgleichung aus (c)(i) darstellt, wobei G eine Konstante ist. [4]

Quellen: