

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

3. Klausur

Dienstag, 9. November 2021 (Vormittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 25]

In dieser Aufgabe sollen Sie einige der Eigenschaften der speziellen Funktionen f und g sowie den Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus untersuchen.

Die Funktionen f und g sind definiert als $f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ und $g(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, mit $z \in \mathbb{C}$.

Betrachten Sie t und u , mit $t, u \in \mathbb{R}$.

- (a) Validieren Sie, dass $u = f(t)$ die Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dt^2} = u$ erfüllt. [2]
- (b) Zeigen Sie, dass gilt: $(f(t))^2 + (g(t))^2 = f(2t)$. [3]
- (c) Verwenden Sie den Zusammenhang $e^{iu} = \cos u + i \sin u$ und finden Sie Ausdrücke in $\sin u$ und $\cos u$ für
 - (i) $f(iu)$; [3]
 - (ii) $g(iu)$. [2]
- (d) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für $(f(iu))^2 + (g(iu))^2$ und vereinfachen Sie diesen. [2]
- (e) Zeigen Sie, dass $(f(t))^2 - (g(t))^2 = (f(iu))^2 - (g(iu))^2$. [4]

Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind als Winkelfunktionen bekannt, da der allgemeine Punkt $(\cos \theta, \sin \theta)$ die Punkte auf dem Einheitskreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert.

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind als Hyperbelfunktionen bekannt, da der allgemeine Punkt $(f(\theta), g(\theta))$ Punkte auf einer Kurve definiert, die als Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ bekannt ist. Diese Hyperbel hat zwei Asymptoten.

- (f) Skizzieren Sie den Graphen von $x^2 - y^2 = 1$, und geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte mit den Achsen sowie die Gleichung jeder Asymptoten an. [4]

Die Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ kann so gedreht werden, dass sie mit der Kurve übereinstimmt, die durch $xy = k$, mit $k \in \mathbb{R}$, definiert ist.

- (g) Finden Sie die möglichen Werte von k . [5]

2. [Maximale Punktzahl: 30]

In dieser Aufgabe sollen Sie die Strategien untersuchen, die zur Lösung eines Systems linearer Differentialgleichungen erforderlich sind.

Betrachten Sie das System linearer Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{dx}{dt} = x - y \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = ax + y,$$

wobei $x, y, t \in \mathbb{R}^+$ und a ein Parameter ist.

Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$.

- (a) (i) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = y$, dass $y = Ae^t$, wobei A eine Konstante ist. [3]
- (ii) Zeigen Sie, dass $\frac{dx}{dt} - x = -Ae^t$. [1]
- (iii) Lösen Sie die Differentialgleichung in Teil (a)(ii) und finden Sie somit x als Funktion von t . [4]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -1$.

- (b) (i) Zeigen Sie durch Differenzieren von $\frac{dy}{dt} = -x + y$ nach t , dass gilt: $\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}$. [3]
- (ii) Zeigen Sie durch die Substitution $Y = \frac{dy}{dt}$, dass $Y = Be^{2t}$, wobei B eine Konstante ist. [3]
- (iii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit y als Funktion von t . [2]
- (iv) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $x = -\frac{B}{2}e^{2t} + C$, wobei C eine Konstante ist. [3]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -4$.

- (c) (i) Zeigen Sie, dass $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$. [3]

Die vorigen Fälle lassen vermuten, dass $y = Fe^{\lambda t}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und F eine Konstante ist.

- (ii) Finden Sie die beiden Werte für λ , so dass gilt: $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$. [4]

Die beiden in Teil (c)(ii) gefundenen Werte seien λ_1 und λ_2 .

- (iii) Validieren Sie, dass $y = Fe^{\lambda_1 t} + Ge^{\lambda_2 t}$ eine Lösung der Differentialgleichung aus (c)(i) darstellt, wobei G eine Konstante ist. [4]

Quellen: